23. Kombinációk. Binomiális tétel, a Pascal-háromszög. A valószínűség kiszámításának kombinatorikus modellje. A hipergeometrikus eloszlás

I. Kombinációk (ismétlés nélküli, ismétléses)

A kombinatorika és a valószínűségszámítás a véletlen tömegjelenségek törvényszerűségeivel foglalkozik.
A kombinatorika tárgyát képezik a sorbarendezési és a kiválasztási problémák, tehát a kombinatorika rendszerint az esetek megszámlálásával foglalkozik, a „hányféleképpen lehetséges” kérdésre válaszol.
DEFINÍCIÓ: Legyen n egymástól különbözõ elemünk. Ha ezekbõl k db-ot kiválasztunk minden lehetséges módon úgy, hogy a kiválasztott elemek sorrendjére nem vagyunk tekintettel, akkor n elem k-ad osztályú ismétlés nélküli kombinációját kapjuk.
TÉTEL: Az n elem k-ad osztályú az ismétlés nélküli kombinációinak száma: $\dfrac{n!}{k!\cdot(n-k)!}=\binom{n}{k}$

DEFINÍCIÓ: Ha n különbözõ elembõl kell k elemet kiválasztani úgy, hogy a kiválasztás sorrendje nem számít, és az egyszer már kiválasztott elemeket újra kiválaszthatjuk, akkor az n elem k-ad osztályú ismétléses kombinációját kapjuk.
TÉTEL: Az n elem k-ad osztályú az ismétléses kombinációinak száma: $\binom{n+k-1}{k}$

II. Binomiális tétel

TÉTEL: $(a+b)^n=\binom{n}{0}a^nb^0+\binom{n}{1}a^{n-1}b^1+\binom{n}{2}a^{n-2}b^2+\ldots+\binom{n}{n-1}a^1b^{n-1}+\binom{n}{n}a^0b^n.$

A tételben szereplő $\binom{n}{k}$ együtthatókat binomiális együtthatóknak nevezzük.

A binomiális tételben szereplő polinom n+1 tagú. Az ilyen sok tagból álló összeg leírására a matematikában egy rövidebb jelölést használnak.

A binomiális tétel rövidebb alakja: $(a+b)^n=\sum_{i=0}^{n} a^{n-i}b^i$. Az ebben szereplő Σ szimbólum, a görög abc szigma betűje jelöli az összegzés műveletét. A binomiális tétel Newton nevéhez kötődik.

A binomiális tétel következménye:

Ha az összeg mindkét tagja 1, akkor

$$2^n=(1+1)^n=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}$$

A jobb oldali kifejezés éppen az n elemű halmaz 0, 1, 2 3… n elemű részhalmazai számának összegét adja meg, ami valóban 2^n-nel egyenlő.

A binomiális együtthatók tulajdonságai:

- 0! a definíció szerint 1, ezért $\binom{n}{n}=1$ és $\binom{n}{0}=1$.
- Az n elem közül ugyanannyiféleképpen lehet k elemet kiválasztani, mint $n-k$ elemet ott-hagyni, így $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$.

Egy harmadik tuljdonság a két szomszédos binomiális együttható közötti összefüggés, amit majd bizonyítani is szeretnék, ez pedig a következő:

Tétel: *Tetszőleges $k,n\in\mathbb{N}$ természetes számok esetén igaz a következő összefüggés:* **($n\geq k$)**

$$\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}=\binom{n+1}{k}$$

Bizonyítás:

Tekintsünk az n+1 elemű halmazunkra úgy, mint n db régi, és +1 db új, mondjuk pirosan jelzett elemre.
Ebből az n+1 db elemből k db-ot kiválasztani kétféleképpen lehet: úgy, hogy a pirosan jelzett elem belekerül a kiválasztottak közé, illetve úgy, hogy nem kerül közéjük. Ezek mindenképp különböző megoldások lesznek, mert az egyik csoport tartalmazza a piros elemet, a másik csoport nem. A piros elemet tartalmazó kiválasztások száma $\binom{n}{k-1}$, hiszen a piros elemen kívül már csak k-1 elemet kell beválogatnunk a halmazba a maradék n elem közül.
Ha pedig minden kiválasztott elem „régi" akkor az n közül kerül ki a halmaz mind a k eleme, ami pedig $\binom{n}{k}$ féleképpen lehet.
És mivel az összes lehetséges kiválasztást ezen két egymást kizáró eset lehetőségeinek összege adja, a tételt tulajdonképpen bizonyítottuk.

A fenti tétel az alapja az úgynevezett Pascal-háromszögnek, amikor a binomiális együtthatókat háromszög alakban rendezzük el szemléltetés céljából, és megfigyelhetjük, hogy bármely két szonszédos tag összegeként állítható elő az egy sorral lejjebb közöttük álló tag.

Továbbá az is megfigyelhető, hogy a Pascal háromszög n-edik sora éppen az $(a+b)^n$ kifejezés együtthatóinak sorozatával egyezik.

$$(a+b)^0 = 1$$
$$(a+b)^1 = 1\cdot a + 1\cdot b$$
$$(a+b)^2 = 1\cdot a^2 + 2\cdot ab + 1\cdot b^2$$
$$(a+b)^3 = 1\cdot a^3 + 3\cdot a^2b + 3\cdot ab^2 + 1\cdot b^3$$
$$(a+b)^4 = 1\cdot a^4 + 4\cdot a^3b + 6\cdot a^2b^2 + 4\cdot ab^3 + 1\cdot b^4$$

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1

$\binom{0}{0}$
$\binom{1}{0}$ $\binom{1}{1}$
$\binom{2}{0}$ $\binom{2}{1}$ $\binom{2}{2}$
$\binom{3}{0}$ $\binom{3}{1}$ $\binom{3}{2}$ $\binom{3}{3}$
$\binom{4}{0}$ $\binom{4}{1}$ $\binom{4}{2}$ $\binom{4}{3}$ $\binom{4}{4}$

III. Események

DEFINÍCIÓ: Véletlen jelenségnek nevezzük azokat a jelenségeket, melyek kimenetele nem egyértelműen meghatározott.
Pl. egy dobókocka feldobása.

DEFINÍCIÓ: Kísérletnek nevezzük a véletlen jelenség megfigyelését.

DEFINÍCIÓ: Elemi eseménynek nevezzük a kísérlet során bekövetkező lehetséges kimeneteleket.
Pl. a kocka dobásánál azt, hogy hányas számot dobunk.

DEFINÍCIÓ: Az **eseménytér** az elemi események halmaza.
Pl. a kocka dobásánál $\{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.

DEFINÍCIÓ: Az elemi események egy halmazát, azaz az eseménytér egy részhalmazát **esemény**nek nevezzük.
Pl. esemény a kockadobásnál páros szám dobása.
Az eseményeket nagybetűvel jelöljük. Pl. $A = \{2; 4; 6\}$

DEFINÍCIÓ: Az eseménytérhez tartozó azon esemény, amely biztosan bekövetkezik, a **biztos esemény**, amely semmiképpen sem következhet be, a **lehetetlen esemény**.

Pl. a kockadobásnál biztos esemény: 7-nél kisebb számot dobunk, lehetetlen esemény: 8-nál nagyobbat dobunk.

IV. Műveletek eseményekkel

DEFINÍCIÓ: Az A **esemény komplementere** az az esemény, amely akkor következik be, amikor A nem következik be. Jele: $\overline{A}$.

DEFINÍCIÓ: Az A és B **események összege** az az esemény, amely akkor következik be, amikor A vagy B bekövetkezik. Jele: $A + B$.

DEFINÍCIÓ: Az A és B **események szorzata** az az esemény, amely akkor következik be, amikor A és B bekövetkezik. Jele: $A \cdot B$.

DEFINÍCIÓ: Az A és B **események egymást kizárják**, ha egyszerre nem következhetnek be.

V. A valószínűség-számítás alapjai

DEFINÍCIÓ: Ha elvégzünk n-szer egy kísérletet, és ebből az A esemény k-szor következik be, akkor **az A esemény relatív gyakorisága** a $\frac{k}{n}$ hányados.

DEFINÍCIÓ: Ha sokszor elvégzünk egy kísérletet, akkor megfigyelhetjük, hogy egy A esemény relatív gyakorisága egy szám körül ingadozik. Ezt a számot nevezzük **az A esemény valószínűség**ének. Jele: $P(A)$.

DEFINÍCIÓ: A valószínűség kiszámításának klasszikus modelljét akkor alkalmazhatjuk, ha egy kísérletnek véges sok kimenetele van és ezek valószínűsége egyenlő. Ekkor az A esemény valószínűsége: $P(A) = \frac{\text{kedvező elemi események száma}}{\text{összes elemi esemény száma}}$.

A valószínűség-számítás axiómái:

- Tetszőleges A esemény esetén $0 \le P(A) \le 1$.
- Biztos esemény valószínűsége 1, lehetetlen eseményé 0.
- Ha A és B egymást kizáró események, akkor $P(A + B) = P(A) + P(B)$.
- Ha A és B tetszőleges esemény, akkor $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B)$.
- $P(A) + P(\overline{A}) = 1$.

Kolmogorov-axiómák

DEFINÍCIÓ: Az A esemény B-re vonatkozó **feltételes valószínűség**e: $P(A \mid B) = \frac{P(A \cdot B)}{P(B)}$. (Bayes tétele)

Ez annak a valószínűsége, hogy az A esemény bekövetkezik, feltéve, hogy a B esemény bekövetkezik.

DEFINÍCIÓ: Az A és B események **egymástól függetlennek nevezzük,** ha $P(A \mid B) = P(A)$.

Bármely két független eseményre igaz, hogy $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$.

DEFINÍCIÓ: Ha egy esemény előfordulását geometriai alakzat (vonal, síkidom, test) mértékével jellemezzük, és az esemény bekövetkezésének valószínűségét ezek hányadosával fejezzük ki, akkor **geometriai valószínűség**ről beszélünk. **Ez a geometriai mérték lehet terület, szakasz hossza, de akár szög is.**

VI. Hipergeometrikus eloszlás

DEFINÍCIÓ: A visszatevés nélküli mintavétel eloszlását **hipergeometrikus eloszlás**nak nevezzük.

TÉTEL: Hipergeometrikus eloszlásnál legyen N db elemünk, amelyből M db elem rendelkezik egy adott A tulajdonsággal, $N - M$ db pedig nem. Kiválasztunk véletlenszerűen visszatevés nélkül n db-ot. Annak a valószínűsége, hogy a kihúzott n db elem közül k db rendelkezik az A tulajdonsággal:

$$\mathbf{P} = \frac{\binom{M}{k} \cdot \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}, \text{ ahol } k \le n.$$

VII. Alkalmazások

a) Kiválasztások

-lottóhúzás hányféleképp lehet?

-hányféleképp lehet egy halmaz bizonyos tulajdonságú részhalmazait kiválasztani?

b) Pascal-háromszög: alkalmazható $(a+b)^n$ nevezetes azonosság felbontásakor az együtthatók meghatározására

c) Klasszikus valószínűségi modell:

- szerencsejátékoknál (pl. kockadobás, érmedobás, totó) nyerési esélyének megállapítása

d) Feltételes valószínűség: orvostudományban pl.*van egy nem teljesen pontos tesztünk ami a cukorbetegség felismerésére szolgál, mert pl.a teszt a cukorbetegek 95%-ánál ad pozitív jelzést, de ugyanakkor az egészségesek 2%-ánál is pozitív jelzést ad, akkor (és lehetséges is ezzel a módszerrel) kiszámolni, hogy mennyi a valószínűsége annak, hogy a teszt pozitív, a személy mégis egészséges?*