24. Permutációk, variációk. A binomiális eloszlás. A valószínűség kiszámításának geometriai modellje

Vázlat:

I. Permutációk
II. Variációk
III. A valószínűség-számítás alapjai
IV. A binomiális eloszlás
V. A valószínűség kiszámításának geometriai modellje
VI. Alkalmazások

Mind a kombinatorika, mind a valószínűségszámítás a véletlen jelenségek törvényszerűségeivel foglalkozik.

A tételem első része a kombinatorikáról szól.
A kombinatorika rendszerint a véletlen kísérletek, a sorbarendezési, kiválasztási problémák lehetséges kimeneteleinek megszámlálásával foglalkozik, a „hányféleképpen lehetséges" kérdésre válaszol.

I. Permutációk

DEFINÍCIÓ: Egy adott n elemű halmaz elemeinek egy **ismétlés nélküli permutáció**ján az n különböző elem egy sorba rendezését (sorrendjét) értjük.

TÉTEL: Egy ***n*** **elemű** halmaz **ismétlés nélküli összes permutációinak száma**:

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = n!.$$

DEFINÍCIÓ: Ha az n elem között van $k_1, k_2, \ldots, k_m$ egymással megegyező, akkor **ezen** elemek egy sorba rendezését **ismétléses permutáció**nak nevezzük.

TÉTEL: Ha n elem között $k_1, k_2, \ldots, k_m$ db megegyező van, és $k + k_2 + \ldots + k_m = n$, akkor ezeket az elemeket $\frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_m!}$ különböző módon lehet sorba rendezni, ez az **ismétléses permutációk száma**.

II. Variációk

DEFINÍCIÓ: Legyen n db egymástól különböző elemünk. Ha ezekből k $(k \le n)$ db-ot kiválasztunk minden lehetséges módon úgy, hogy a kiválasztott elemek sorrendje is számít, akkor az n elem k-ad osztályú **ismétlés nélküli variáció**ját kapjuk.

TÉTEL: Az *n* elem *k*-ad osztályú ismétlés nélküli variációk száma: $\frac{n!}{(n-k)!}$ **ami szorzat alakban is felírható n(n-1)(n-2).....(n-k+1) formában.**

DEFINÍCIÓ: Legyen n db egymástól különböző elemünk. Ha ezekből kiválasztunk k db-ot minden lehetséges módon úgy, hogy a kiválasztott elemek sorrendje is számít és ugyanazt az elemet többször is választhatjuk, akkor az n elem k-ad osztályú **ismétléses variáció**ját kapjuk.

TÉTEL: Az n elem k-ad osztályú ismétléses variációk száma: n^k.

Most rátérnék a valószínűségszámításra.

III. A valószínűségszámítás alapjai

DEFINÍCIÓ: Véletlen jelenségnek nevezzük azokat a jelenségeket, melyek kimenetele nem egyértelműen meghatározott.
Pl. egy dobókocka feldobása.

DEFINÍCIÓ: Kísérletnek nevezzük a véletlen jelenség megfigyelését.

DEFINÍCIÓ: Elemi eseménynek nevezzük a kísérlet során bekövetkező lehetséges kimeneteleket.
Pl. a kocka dobásánál azt, hogy hányas számot dobunk.

DEFINÍCIÓ: Az **eseménytér** az elemi események halmaza.
Pl. a kocka dobásánál $\{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.

DEFINÍCIÓ: Az elemi események egy halmazát, azaz az eseménytér egy részhalmazát **esemény**nek nevezzük.
Pl. esemény a kockadobásnál páros szám dobása.
Az eseményeket nagybetűvel jelöljük. Pl. $A = \{2; 4; 6\}$

DEFINÍCIÓ: Az eseménytérhez tartozó azon esemény, amely biztosan bekövetkezik, a **biztos esemény**, amely semmiképpen sem következhet be, a **lehetetlen esemény**.

Pl. a kockadobásnál biztos esemény: 7-nél kisebb számot dobunk, lehetetlen esemény: 8-nál nagyobbat dobunk.

Műveletek eseményekkel:

DEFINÍCIÓ: Az A **esemény komplementere** az az esemény, amely akkor következik be, amikor A nem következik be. Jele: $\overline{A}$.

DEFINÍCIÓ: Az A és B **események összege** az az esemény, amely akkor következik be, amikor A vagy B bekövetkezik. Jele: $A + B$.

DEFINÍCIÓ: Az A és B **események szorzata** az az esemény, amely akkor következik be, amikor A és B bekövetkezik. Jele: $A \cdot B$.

DEFINÍCIÓ: Az A és B **események egymást kizárják**, ha egyszerre nem következhetnek be.

DEFINÍCIÓ: Ha elvégzünk n-szer egy kísérletet, és ebből az A esemény k-szor következik be, akkor **az A esemény relatív gyakorisága** a $\frac{k}{n}$ hányados.

DEFINÍCIÓ: Ha sokszor elvégzünk egy kísérletet, akkor megfigyelhetjük, hogy egy A esemény relatív gyakorisága egy szám körül ingadozik. Ezt a számot nevezzük **az A esemény valószínűségé**nek. Jele: $P(A)$.

DEFINÍCIÓ: A valószínűség kiszámításának klasszikus modelljét akkor alkalmazhatjuk, ha egy kísérletnek véges sok kimenetele van és ezek valószínűsége egyenlő. Ekkor az A esemény valószínűsége: $P(A) = \frac{\text{kedvező elemi események száma}}{\text{összes elemi esemény száma}}$.

A valószínűség-számítás axiómái:

- Tetszőleges A esemény esetén $0 \le P(A) \le 1$.
- Biztos esemény valószínűsége 1, lehetetlen eseményé 0.
- Ha A és B egymást kizáró események, akkor $P(A + B) = P(A) + P(B)$.
- Ha A és B tetszőleges esemény, akkor $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B)$.
- $P(A) + P(\overline{A}) = 1$.

Kolmogorov-axiómák

DEFINÍCIÓ: Az A esemény B-re vonatkozó **feltételes valószínűsége**: $P(A \mid B) = \frac{P(A \cdot B)}{P(B)}$. (Bayes tétele)

Ez annak a valószínűsége, hogy az A esemény bekövetkezik, feltéve, hogy a B esemény bekövetkezik.

DEFINÍCIÓ: Az A és B események **egymástól függetlennek nevezzük,** ha $P(A \mid B) = P(A)$.

Bármely két független eseményre igaz, hogy $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$.

IV.Binomiális eloszlás

DEFINÍCIÓ: **Valószínűségi változónak** nevezzük az olyan mennyiséget, melynek értéke a véletlen kísérlet kimenetelétől függ (pl. kockadobás sorozatnál a dobott hatosok száma).

DEFINÍCIÓ: **Diszkrét valószínűségi változóról** akkor beszélünk, ha egy valószínűségi változó lehetséges értékeinek száma véges vagy megszámlálhatóan végtelen.

DEFINÍCIÓ: A **binomiális eloszlás** olyan visszatevéses mintavételi kísérleteknél fordul elő, amelynek csak két kimenetele lehetséges, és ez a két kiemenetel egymás komplementere (pl. fej vagy írás dobása, fiú vagy lány születése, hatos vagy nem hatos dobása) . Ha az egyik esemény bekövetkezésének valószínűségét p-vel jelöljük, akkor a másik esemény 1 - p valószínûséggel következik be.

TÉTEL: Binomiális eloszlásnál ha a kísérletet n-szer ismételjük, akkor annak valószínűsége, hogy az A esemény k-szor következik be, éppen

$$P=\binom{n}{k}\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k}\text{, ahol } k\le n.$$

BIZONYÍTÁS: Tekintsünk egy olyan visszatevéses mintavételi kísérletet, ahol N db elem közül választunk ki n db-ot, miközben minden elemet a megtekintés után visszateszünk. Rendelkezzen az N db elem közül M db egy kiszemelt tulajdonsággal (pl. ép) és a többi N-M db legyen másféle (pl. hibás). Annak a valószínűségét kell kiszámolni, hogy a kihúzott n db elem között k db elem rendelkezik a kiszemelt tulajdonsággal.

Használjuk a klasszikus valószínűségi modellt. Az összes lehetséges kimenetelek száma N^n, mert az n db kiválaszott elem bármelyike a készlet N db eleme közül bármelyik lehet. Kedvezőek azonban csak azok az esetek lesznek, amikor a kiválaszott n db elem közül pontosan k db rendelkezik a kiszemelt tulajdonsággal.

A kombinatorikában tanultak szerint a kedvező esetek száma $\binom{n}{k}\cdot M^k\cdot(N-M)^{n-k}$, mert k-szor kell M db golyóból választanunk, $n-k$-szor kell $N-M$ db golyó közül, és ez $\binom{n}{k}$-féleképpen fordulhat elő aszerint, hogy

a kihúzott elemek közül sorrend szerint hányadikak rendelkeznek a kiszemelt tulajdonsággal.

Akkor

P= $\frac{\text{kedvező esetek száma}}{\text{összes eset száma}}$ $\frac{\binom{n}{k}\cdot M^k\cdot(N-M)^{n-k}}{N^n}=\quad=$

Csoportotsítsuk át a nevező n db tényezőjét.

$$\binom{n}{k}\cdot\frac{M^k}{N^k}\cdot\frac{(N-M)^{n-k}}{N^{n-k}}=$$

Használjuk az azonos kitevőjű hatványok osztására vonatkozó azonosságot.

$$\binom{n}{k}\cdot\left(\frac{M}{N}\right)^k\cdot\left(\frac{N-M}{N}\right)^{n-k}$$

Tulajdonképpen bebizonyítottuk az állítást, mivel észrevehetjük, hogy a két hatvány alapja éppen p ill. 1-p, hiszen annak az esélye, hogy a kiszemelt tulajdonsággal rendelkező elemet húzunk, p = $\frac{M}{N}$, és annak az esélye, hogy az ezen tulajdonsággal nem rendelkezőt húzzuk, 1-p= 1 -$\frac{M}{N}$, ami közös nevezőre hozva és összevonva éppen $\frac{N-M}{N}$. Ha tehát a hatványalapok helyére behelyettesítjük p-t és 1-p-t, a bizonyítandó állítást kapjuk.

Mielőtt a következő modellre rátérek, szeretném megjegyezni, hogy a binomiális eloszlás modellel közelítőleg akkor is helyes eredményt kapunk, ha olyan nem visszatevéses mintavéltelre alkalmazzuk, ahol nagyszámú kollekcióból kisszámú mintavétel történik visszatevés nélkül.

V. A valószínűség geometriai modellje

Definíció:

Ha a „H" eseménytér mérhető (például van hossza, területe vagy térfogata) és eseményei mérhetők és valószínűségük egyenesen arányos a mértékükkel, akkor ezt az eseményteret az eseményeivel és a közöttük értelmezett műveletekkel (összeadás, kivonás, szorzás, komplementer) együtt geometriai valószínűségi mezőnek nevezzük.

A geometriai valószínűségi mezőn értelmezett mérték lehet pl. hosszúság, terület, térfogat, de akár szög is.

A geometriai modell szerint az esemény valószínűségét kiszámohatjuk a kedvező eseménynek megfelelő geometriai mérték és a teljes eseménytérhez tartozó geometriai mérték, pl. kedvező terület és teljes terület hányadosaként.

Vegyük példának a céltáblára lövést. Elemi esemény, ha a céltábla egy pontját eltaláljuk. Fontos megjegyezni, hogy szemben a klasszikus modell eseményterével itt az eseménytér végtelen (mert a céltáblának végtelen sok pontja van). Biztos eseménynek tételezzük fel, hogy a lövés eltalálja a céltáblát (azaz 1 valószínűséggel érkezik a céltáblára), viszont 0 valószínűsége, hogy eltalálunk egy adott pontot, mivel egy pont mértéke nulla. Érdekes tény tehát, hogy egy pont eltalálása ebben az eseménytérben 0 valószínűségű, az esemény mégsem lehetetlen esemény.

Alkalmazások:

Geometriai modell:

- egy adott méretű darts táblának vagy céltáblának egy bizonyos részébe esõ találat valószínűségének kiszámítása
- két ember találkozásának valószínűségének meghatározása egy bizonyos időintervallumban, ha pl. egyikük sem vár 15 percnél többet
- egy véletlenszerűen kiválasztott origón átmenő egyenesnek mekkora valószínűséggel lesz közös pontja egy az origót nem tartalmazó körlappal

Sorbarendezések:

- szerncsejátékok, pl. hányféleképp lehet kitöteni egy totószelvényt

Binomiális eloszlás:

- gazdaságban pl. minőség-ellenőrzés céljából végzett mintavételeknél